LEKCIJE IZ MATEMATIKE 2

Ivica Gusić

Lekcija 9

Lokalni ekstremi funkcije više varijabla

Lekcije iz Matematike 2.

9. Lokalni ekstremi funkcije više varijabla.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se obradjuje metoda za odredjivanje najmanje i najveće vrijednosti funkcije dviju varijabla.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Problemi minimizacije i maksimizacije spadaju u najvažnije praktične i teoretske probleme. Smisao je da se odrede vrijednosti argumenata u kojima neka funkcija postiže svoju najmanju ili najveću vrijednost (lokalno ili globalno). Vidjeli smo da se taj problem za funkcije jedne varijable rješava pomoću derivacija. Sad ćemo vidjeti da se analogan problem za funkcije više varijabla rješava pomoću parcijalnih derivacija.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati pojam lokalnog ekstrema funkcije jedne varijable i metode njegova odredjivanja. Takodjer, treba poznavati pojam i i geometrijsko značenje parcijalnih derivacija funkcije dviju varijabla, te jednadžbu tangentne ravnine na graf funkcije f dviju varijabla u točki grafa $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

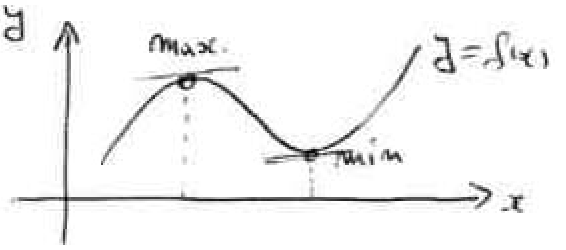
Pojam i geometrijska predožba lokalnog ekstrema funkcije dviju varijabla.

Prema uzoru na lokalni ekstrem funkcije jedne varijable (sl.1.), uvodimo pojam lokalnog ekstrema funkcije f dviju varijabla (sl.2.):

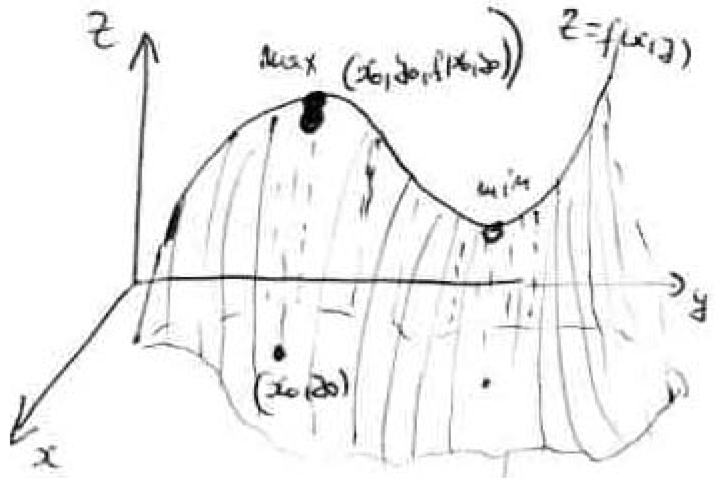
f ima lokalni minimum u (x_0, y_0) ako je $f(x_0, y_0)$ najmanja vrijednost u nekoj okolini od (x_0, y_0).

f ima lokalni maksimum u (x_0, y_0) ako je $f(x_0, y_0)$ najveća vrijednost u nekoj okolini od (x_0, y_0).

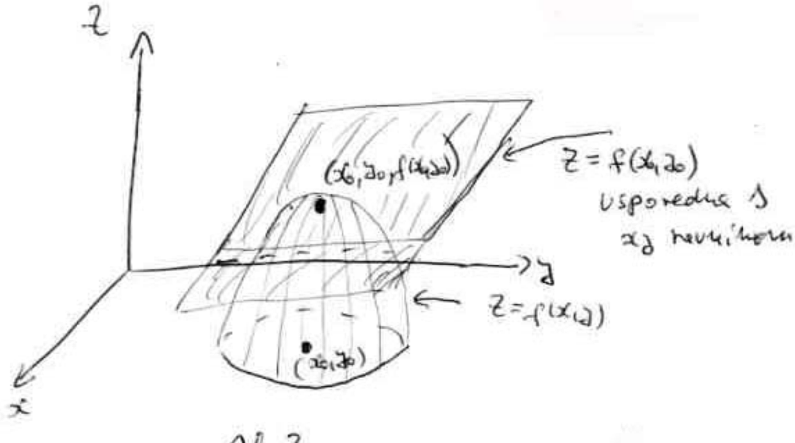
Uočite da je tangentna ravnina na graf u lokalnom ekstremu usporedna s xy-ravninom, i analogiju s lokalnim ekstremom funkcije jedne varijable, kod koje je tangenta u lokalnom ekstremu usporedna s x-osi (sl.3.).


y
max.
y = f(x)
min
x

Sl. 1.


z
max
(x0, y0, f(x0, y0))
z = f(x, y)
min
y
(x0, y0)
x

Sl. 2.

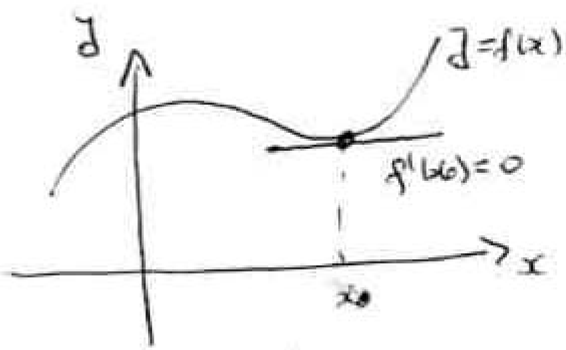

z
(x0, y0, f(x0, y0))
z = f(x0, y0)
usporedna s
xy ravninom
y
z = f(x, y)
(x0, y0)
x

Sl. 3.

Nužan uvjet ekstrema funkcije dviju varijabla - stacionarne točke. Iz jednadžbe tangentne ravnine na graf funkcije f dviju varijabla u točki grafa $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ i geometrijske predodžbe lokalnog ekstrema, zaključujemo da jednadžba tangentne ravnine u lokalnom ekstremu mora biti $z = f(x_0, y_0)$, tj. da su uvjeti:

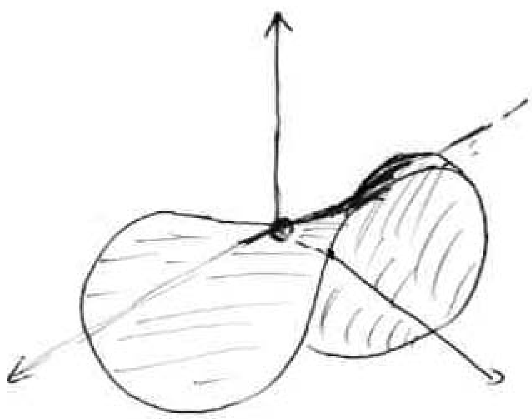
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \ i \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

nužni uvjeti lokalnog ekstrema u (x_0, y_0). Usporedite s lokalnim ekstremom funkcije jedne varijable (sl.4.).



Sl.4.

Točke koje zadovoljavaju nužan uvjet ekstrema zovu se **kritične točke** (kao i kod funkcija jedne varijable). U kritičnoj točki može biti lokalni minimum ili lokalni maksimum ili može biti **sedlasta točka** - analogon točke infleksije za funkcije jedne varijable (sl.5.).

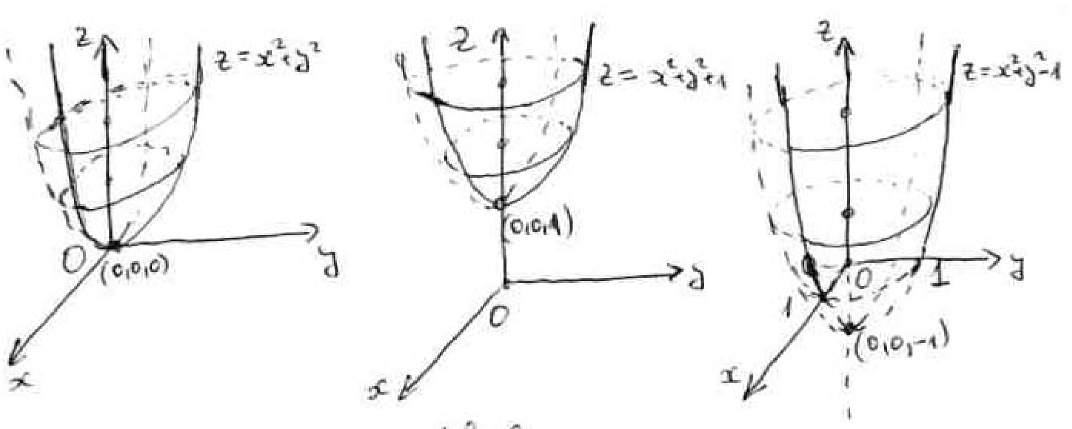


Sl.5. Sedlasta točka u ishodištu

Analogno se dobiju nužni uvjeti lokalnog ekstrema za funkcije triju ili više varijabla, samo što se ne mogu ovako jednostavno geometrijski predočiti.

Primjer 1. Skicirajmo graf i odredimo kritične točke funkcije:
a) $f(x,y) := x^2 + y^2$,
b) $f(x,y) := x^2 + y^2 + 1$,
c) $f(x,y) := x^2 + y^2 - 1$,
d) $f(x,y) := x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5$,
e) $f(x,y) := 4 - x^2 - y^2$,
Pokušajmo odrediti njihov karakter.

Za a), b) i c) je $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$.
Zato je $x = y = 0$ rješenje sustava $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, pa je $(0,0)$ jedina stacionarna točka. Iz slike 6. vidimo da je to uvijek minimum, samo što je vrijednost minimuma redom $0, 1, -1$.

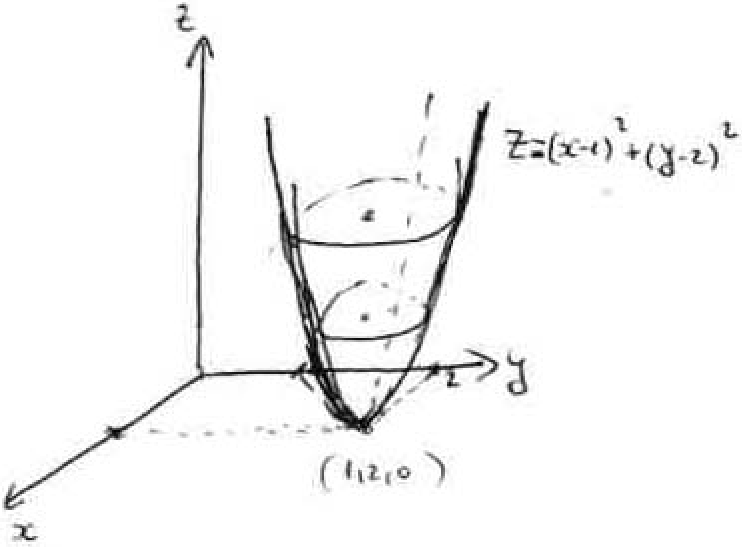


Sl. 6.

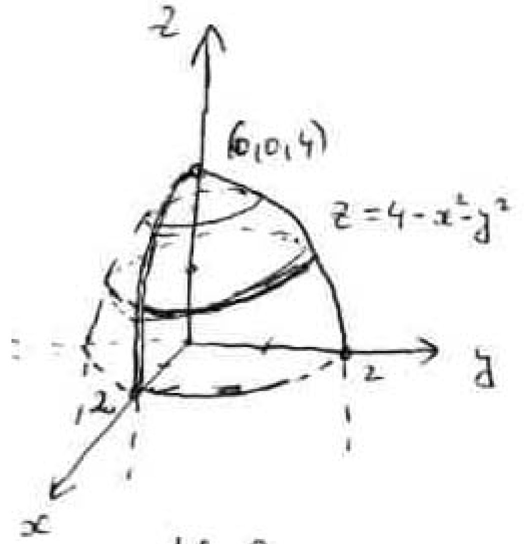
Drugim riječima, tjemena su redom $T(0,0,0)$, $T(0,0,1)$, $T(0,0,-1)$.
Uočite da ste do rezultata mogli doći samo crtanjem grafa (bez traženja stacionarnih točaka).
U d) je $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4$, što vodi do stacionarne točke $(1,2)$. I u toj je točki minimum, što se vidi iz jednakosti

$$x^2 - 2x + y^2 - 4x + 5 = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

pa možemo pisati $f(x,y) := (x-1)^2 + (y-2)^2$. Slika je poput one iz a), samo što je tjeme u $(1,2,0)$ (sl.7.).
U e) je $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$, pa je, opet, $(0,0)$ stacionarna točka. U toj je točki maksimum (sl.8.).



Sl. 7.

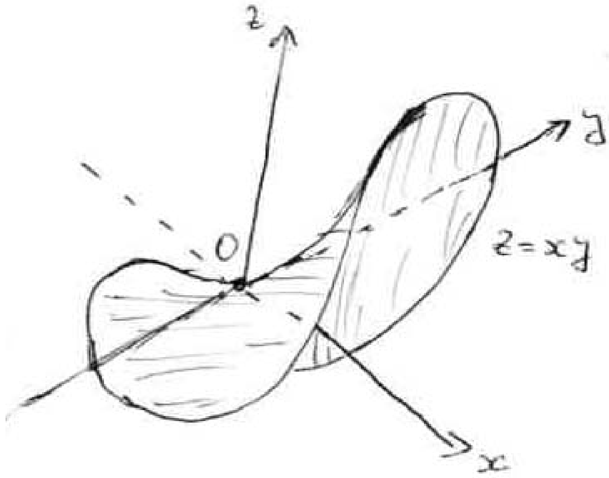


Sl. 8

Primjer 2. Skicirajmo graf i odredimo kritične točke funkcije $f(x,y)=xy$.

Tu je $\frac{\partial f}{\partial x}=y$ i $\frac{\partial f}{\partial y}=x$, pa je, opet, $(0,0)$ stacionarna točka. U toj točki nije lokalni ekstrem, već **sedlasta točka**. Graf nije lako jasno predočiti, ali se vidi sljedeće:
1. graf sadrži koordinatne osi (jer je na njima $xy=0$, tj. $z=0$),
2. Za (x,y) iz prvog ili trećeg kvadranta, graf je iznad, a za one iz trećeg i četvroga kvadranta, on je ispod xy ravnine.
Zato graf možemo zamisliti kao sedlo: prednji dio sedla je iznad 1. kvadranta

(uzdiže se), a stražnji iznad 3. kvadranta (takodjer se uzdiže). Desna i lijeva strana sedla ide prema dolje i ona je ispod 2. i ispod 4. kvadranta. Kako se ti dijelovi sastaju u ishodištu, ono se naziva sedlastom točkom (sl.9.).



sl. 9.

Fizikalno, sedlaste točke odgovaraju nestabilnim točkama procesa.

Dodatak. Kriterij lokalnog ekstrema i sedlaste točke.
Prema analogiji s funkcijama jedne varijable, gdje se karakter stacionarne točke može opisati pomoću derivacija višeg reda, izvodi se analogan, ali bitno složeniji kriterij, za karakter stacionarnih točaka funkcije dviju varijabla (sl.10).
Iz slike vidimo da je logično da se uvjet: $f''(x_0) > 0$ zamijeni s $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0$, slično za $f''(x_0) < 0$. Pokazuje se da to nije dovoljno. Potreban je još jedan uvjet u kojemu sudjeluje determinanta sastavljena od drugih parcijalnih derivacija u stacionarnoj točki.
Evo opisa kriterija:
Neka je (x_0, y_0) stacionarna točka od f. Definiramo:
$A := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$
$C := \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$
$B := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$
$\Delta := AC - B^2$.
Tada vrijedi:
(i) Ako je $\Delta < 0$ onda je (x_0, y_0) sedlasta točka.
(ii) Ako je $\Delta > 0$ onda je (x_0, y_0) točka lokalnog ekstrema i to:
Za $A < 0$ to je lokalni maksimum
Za $A > 0$ to je lokalni minimum.
Uočite sličnost s kriterijom za funkcije jedne varijable.
Uočite takodjer, da je, uz uvjet $\Delta > 0$, uvjet $A > 0$ ekvivaletan uvjetu $C < 0$ (i slično za $A > 0$). Zato je dovoljno provjeriti bilo koji od tih uvjeta. Mi smo stavili uvjet za A, a mogli smo i za C.
(iii) Ako je $\Delta = 0$, kriterij ne daje odluku.

Primjer 3. - primjena kriterija. Odredimo lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) := x^3 - 3xy + y^3$.

Tu je $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$.
Zato je:
$A = 6x$, $C = 6y$, $B = -3$, $\Delta = 6x \cdot 6y - (-3)^2 = 9(4xy - 1)$.
Stacionarne se točke dobiju iz sustava:
$y = 3x^2$ i $x = 3y^2$.
Dobiju se točke: $(0,0)$ i $(1,1)$. Izrazi A, B, C, Δ mogu se gledati kao funkcije dviju varijabla. Vidimo da je:
$\Delta(0,0) = -9 < 0$ pa je $(0,0)$ sedlasta točka.
$\Delta(1,1) = 27 > 0$ pa je $(1,1)$ točka lokalnog ekstrema.
Kako je $A(1,1) = 6 > 0$, zaključujemo da je $(1,1)$ lokalni minimum.

Primjer 4. - primjena pojma lokalnog ekstrema. Od svih kvadara zadana obujma odredimo onaj minimalna oplošja.

Prije rješavanja napomenimo da su zadatci ovoga tipa vrlo su važni u primjeni, jer organske i anorganske tvorevine često imaju ovakvo (ili nekakvo drugčije) svojstvo minimalnosti. Naravno, ovaj je zadatak zanimljiv za minimizaciju potrošnje materijala.

Označimo s x, y, z duljine bridova kvadra, s O oplošje i s V obujam. Tada je
$V = xyz$, tj. $z = \frac{V}{xy}$ i $O = 2(xy + xz + yz) = 2(xy + \frac{V}{y} + \frac{V}{x})$, pa se zadatak svodi na odredjivanje minimuma funkcije

$$f(x,y) := xy + \frac{V}{x} + \frac{V}{y}$$

za pozitivne x, y. Dobijemo:
$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{V}{x^2}$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{V}{y^2}$.
Stacionarne točke dobijemo iz sustava:
$y = \frac{V}{x^2}$; $x = \frac{V}{y^2}$,
odakle dobijemo $xy^2 = yx^2$, tj. $y = x$ (jer je $x, y > 0$). Uvrštavanjem u neku od gornjih jednadžba, dobijemo: $x = y = z = \sqrt[3]{V}$. Zaključujemo da je rješenje kocka. Dakle:
Od svih kvadara stalnog obujma, najmanje oplošje ima kocka.
Da je dobiveno rješenje minimum, a ne maksimum, možemo zaključiti na dva načina:
1. način (čisto matematički, pomoću kriterija). Postupak provedite sami.
2. način (zdravorazumski). Oplošje nema najveće vrijednosti, uz stalni obujam može biti po volji veliko (objasnite). Zato stacionarna točka treba biti minimum.

V. Pitanja i zadaci

1. Provjerimo kriterij ekstrema na funkcijama iz Primjera 1 i Primjera 2.

2. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) := x^3 - 3xy^2 + 3y^2$.